

Dimostrazione Assistita
per la Matematica e l'Apprendimento
(DAMA)

Descrizione del progetto di ricerca

17 ottobre 2005

1 Obiettivi del progetto

1.1 Obiettivi a lungo termine

Recenti studi nell'ambito del Mathematical Knowledge Management (progetti europei MoWGLI IST-33562 e MKM-Net IST-37075) hanno prodotto diverse tecnologie per la pubblicazione, la distribuzione, l'indicizzazione, la ricerca e il data mining di librerie distribuite di conoscenza matematica formalizzata in un qualche sistema logico e memorizzata in formati standard basati su XML.

Tali nuovi strumenti sono stati applicati a librerie già esistenti, ma si prevede che possano avere un impatto significativo già nella fase di produzione di tali librerie per mezzo di assistenti alla dimostrazione (proof assistant, PA). Attualmente questa fase resta quella più critica in termini di tempo e competenze richieste, specialmente quando la formalizzazione viene intrapresa da matematici che per formazione sono poco avvezzi e poco interessati alle difficoltà intrinseche alla formalizzazione stessa e all'interazione con la macchina.

In questo progetto ci proponiamo di testare e valorizzare Matita, un PA da noi sviluppato conforme allo stato dell'arte della dimostrazione assistita che integra le più recenti tecnologie di Mathematical Knowledge Management. L'obiettivo è duplice. Il primo aspetto è la valutazione se la stretta integrazione tra PA e tecnologie di Mathematical Knowledge Management costituisca un effettivo aiuto per un matematico che si appresti a formalizzare una teoria. A tal fine il nostro gruppo di ricerca include matematici afferenti al settore scientifico disciplinare MAT/05 (Analisi matematica). Il secondo aspetto riguarda l'effettivo sfruttamento delle librerie prodotte, le quali sono non soltanto "comprese" e quindi manipolabili dalla macchina (grazie alla formalizzazione in un determinato sistema logico), ma anche facilmente accessibili da parte dell'umano grazie all'indicizzazione e alle tecniche di presentazione del Mathematical Knowledge Management. In particolare vediamo enormi potenzialità didattiche in quanto per la prima volta diviene possibile proporre agli studenti degli esercizi interattivi di dimostrazione che affianchino gli attuali esercizi di calcolo. L'interfaccia didattica che vogliamo proporre, chiamata *esercitatore*, deve essere in grado di proporre allo studente un esercizio di dimostrazione di un qualche teorema basato su una libreria pre-esistente e facilmente accessibile di conoscenze preliminari (definizioni, lemmi, teoremi). Lo studente, per ovvie esigenze didattiche, deve poter essere lasciato solo di fronte al teorema da provare come lo è davanti a un foglio bianco e deve proporre una prova che la macchina sia in grado di verificare passo passo. Al tempo stesso l'esercitatore deve fornire un efficace supporto allo studente sia nella comprensione degli errori, sia nello svolgimento di compiti meccanici (p.e. di calcolo) che distraggono lo studente dal flusso principale della prova.

1.2 Originalità del lavoro e apporto culturale e tecnologico

La proposta presenta almeno due elementi di originalità. Il primo è l'integrazione di tecniche di Mathematical Knowledge Management e di dimostrazione assistita già a partire dalla fase di formalizzazione della conoscenza matematica. Tale integrazione, auspicata nell'ambito di recenti progetti europei (MoWGLI IST-33562 e MKM-Net IST-37075) non è stata finora possibile per la mancanza di PA che integrassero entrambi gli aspetti. Matita, il PA da noi sviluppato negli ultimi anni e adottato come strumento centrale in questo progetto, è il primo PA a mostrare tale integrazione. La prova sul campo dello strumento da parte di un gruppo di matematici è quindi un test illuminante sui recenti sviluppi tecnologici della disciplina. La speranza è quella di confermare un effettivo progresso tecnologico nell'area.

Il secondo elemento di originalità, di immediato interesse anche commerciale, è lo sviluppo di interfacce didattiche interattive per l'apprendimento e l'(auto-)valutazione delle capacità di dimostrazione in matematica. Le potenzialità sono molteplici sia nell'area dell'e-learning

e dell'apprendimento a distanza, sia nell'ambito della valutazione degli studenti in fase di esame.

1.3 Congruità dello studio in rapporto alle competenze del gruppo di ricerca

Il gruppo di ricerca proposto prevede la partecipazione di matematici e informatici. I matematici e gli informatici collaboreranno strettamente sia alla fase di formalizzazione (p.e. individuando il linguaggio più opportuno per l'interazione dei matematici con il PA), sia a quella di sviluppo dell'esercitatore e suo utilizzo all'interno di un corso di Analisi I. Fra gli informatici troviamo i membri del giovane gruppo di ricerca che sta sviluppando il PA Matita e che supporterà attivamente gli altri gruppi adattando e valorizzando Matita per adattarlo alle esigenze didattiche e di formalizzazione.

1.4 Prospettive di sviluppo

La principale evoluzione del progetto dopo la fase di start-up consiste nell'integrazione dell'esercitatore da noi sviluppato in un framework di e-learning per la matematica. Due prototipi di tali framework sono già stati sviluppati nel Sesto Programma Quadro dai progetti LeActiveMath (Language-Enhanced, User Adaptive, Interactive eLearning for Mathematics, IST-507826) e WebALT (Web Advanced Learning Technologies, EDC-22253).

Il primo framework è progettato intorno al concetto di "user model", una descrizione delle conoscenze dello studente che viene usato per personalizzare l'interfaccia e il livello di difficoltà degli esercizi proposti. Lo user model viene automaticamente aggiornato ogni qual volta uno studente prova a risolvere un esercizio o (ri-)legge una qualche descrizione. Un'integrazione del nostro esercitatore in tale framework deve risolvere il problema di stabilire criteri secondo i quali reagire ed aggiornare lo user model. In altre parole il problema diventa far comprendere alla macchina il livello di apprendimento dello studente a partire dalle sue azioni (p.e. dal numero e dalle caratteristiche dei vicoli ciechi incontrati durante la prova o dall'analisi dei circoli viziosi presenti).

Il secondo framework si occupa di creare una libreria distribuita di esercitatori, esercizi e strumenti (semi-)automatici di calcolo e dimostrazione che lo studente possa utilizzare, eventualmente collaborativamente, per risolvere determinati problemi. Nonostante il framework sia stato pensato e venga ora implementato nella sua generalità, attualmente non esistono esercitatori per la dimostrazione. L'esercitatore da noi sviluppato nella fase di start-up rappresenta quindi il perfetto candidato all'integrazione in tale framework.

È auspicabile che nell'ambito del Settimo Programma Quadro i due framework possano venire integrati e venga data maggior enfasi alla parte dedicata alla dimostrazione, alla quale noi possiamo contribuire in maniera significativa.

Altri possibili sviluppi riguardano l'area del Mathematical Knowledge Management (progetti MoWGLI IST-33562 e MKM-Net IST-37075). In particolare il feedback ottenuto da questo progetto sugli strumenti di Mathematical Knowledge Management suggerirà i requisiti della prossima generazione, lo sviluppo della quale verrà auspicabilmente portato avanti nel Settimo Programma Quadro.

1.5 Reperimento di fondi successivi

Il progetto ha molteplici relazioni con numerose tematiche all'interno delle aree strategiche "Information society technologies" del Sesto Programma Quadro della comunità europea. In particolare: "Technology-enhanced learning and access to cultural heritage", "Semantic-based knowledge systems" e "Multimodal interfaces". Nonostante non si abbiano ancora dettagli sui contenuti dei sotto-programmi del Settimo Programma Quadro, è ragionevole

attendarsi che tali tematiche siano presenti nel terzo sotto-programma (“Information and communication technologies”) e nella seconda priorità tematica (“Information Society Technologies”) e che sia possibile accedere a finanziamenti proponendo progetti europei nell’ambito delle cooperazioni “Collaborative Research: European Excellence” e “Joint Technology Initiatives and Technology Platforms”.

Concretamente nel work-plan istituimo un work-package (“project management”) che è in parte dedicato a monitorare le call del Settimo Programma Quadro e ad individuare le tematiche a noi più affini e gli strumenti a cui fare ricorso. Il work-package prevede anche attività di diffusione dei risultati da noi raggiunti, in particolare presso le comunità di e-learning e di Mathematical Knowledge Management che rappresentano i nostri naturali partner per la continuazione del progetto in seno alla comunità europea.

1.6 Fase di start-up: obiettivi a breve termine

Nella fase di start-up ci proponiamo tre obiettivi concreti che si tradurranno in altrettanti work-package nel work-plan: la verifica dell’usabilità di PA da parte di matematici tramite la formalizzazione (secondo diversi stili) di un teorema significativo di analisi; lo sviluppo di un’interfaccia didattica interattiva per la dimostrazione (esercitatore); la valorizzazione e lo sviluppo del proof assistant Matita.

1.6.1 Verifica dell’usabilità di PA nella pratica matematica

Gli ultimi 18 mesi hanno visto un decisivo salto di qualità nella storia della dimostrazione interattiva di teoremi. Ricordiamo in particolare: la prima prova formale in Coq del Teorema dei Quattro Colori (INRIA-Microsoft); la prova in Mizar del Teorema della Curva di Jordan, che suggella un lungo lavoro durato 13 anni e che ha dato vita a una vastissima libreria di risultati matematici formalizzati; la creazione di Flyspec, una importante cooperazione internazionale che sta verificando con l’ausilio di diversi PA la prova della Congettura di Keplero, sotto la direzione di Tom Hales, il matematico a cui si deve la prova. Indubbiamente il raggiungimento di tali pietre miliari è dovuto al continuo miglioramento dello stato dell’arte nello sviluppo di PA.

Sebbene le prove di tali teoremi siano indubbiamente risultati notevolissimi, la vera sfida dei PA è quella di diventare in un futuro prossimo strumenti di chiara utilità per la dimostrazione di prove “usuali”, in modo da affiancare i computer algebra system fra gli strumenti a disposizione di un matematico nel suo lavoro quotidiano. Da questo punto di vista teoremi combinatorici quali quello dei Quattro Colori o la congettura di Keplero non sono fra i più interessanti in quanto vengono provati con tecniche non comuni e necessitano l’utilizzo di un elaboratore per provare meccanicamente un elevatissimo numero di lemmi ripetitivi.

In DAMA ci proponiamo di provare il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue in Matita. Seguiremo la prova proposta da Rudin in “Real and Complex Analysis”, che tratta il caso dell’integrazione astratta. Tale teorema, sicuramente non banale e di indubbio rilievo, rappresenta un ottimo test per la maturità dello strumento. La formalizzazione verrà effettuata principalmente da un gruppo di giovani matematici dell’area MAT/05 (Analisi Matematica) privi di precedenti esperienze con PA. Pertanto essi risultano un campione significativo del target di utenti che si vuole raggiungere. Quest’ultimo aspetto è inaspettatamente innovativo tenendo conto del fatto che la quasi totalità di utilizzatori di PA è costituita dalla comunità di logici e informatici, la cui forma mentis differisce da quella dei matematici e condiziona le interfacce e le metodologie di prova messe a disposizione da un PA.

Diverse motivazioni ci hanno spinto alla scelta del Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue. Il teorema si basa sulla teoria assiomatica della misura, pertanto è relativamente auto-contenuto. Questo permette di pianificare il completamento della dimostrazione in tempi relativamente brevi, entro la fase di start-up del progetto. Il teorema, e più in generale

la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, sono alla base di molteplici aree teoriche e applicative della matematica, quali la teoria della probabilità e le equazioni alle derivate parziali. Pertanto a partire da tale teorema sono possibili numerosi sviluppi futuri in settori finora trascurati dalla dimostrazione assistita. È nostra intenzione dedicarci a uno di essi nel corso del progetto una volta terminata la fase di start-up o qualora l'efficacia di Matita risultasse tale da permettere di completare la prova del teorema in tempi inferiori a quelli previsti.

1.6.2 Sviluppo di un'interfaccia didattica interattiva per la dimostrazione di teoremi (esercitatore)

Una delle finalità e delle peculiarità dell'insegnamento scientifico universitario consiste, a nostro avviso, nel fondare e talvolta riorganizzare su una solida base logica-deduttiva le conoscenze passate e future. Nel corso degli ultimi anni, durante la nostra attività didattica presso diversi corsi di laurea, ci siamo resi però conto che gli studenti manifestano profonde difficoltà nel capire cosa sia una dimostrazione o quando una congettura risulti veramente dimostrata; questo a prescindere dalla materia con cui ci si sta misurando.

Purtroppo è anche vero che la mole degli studenti che frequentano i vari corsi è tale che difficilmente un docente può dedicarsi con efficacia alla "didattica della dimostrazione". Lo stesso problema si pone per l'insegnamento degli aspetti di calcolo. Tuttavia, poichè la correttezza del risultato garantisce almeno la parziale correttezza del procedimento, in questo caso sono disponibili molteplici risorse (libri, programmi di autoistruzione, etc.) per aiutare lo studente a misurarsi da solo sui singoli esercizi. Questo non si può dire in generale per quei problemi che consistono in vere e proprie dimostrazioni.

Pertanto ci poniamo l'obiettivo di sviluppare un programma didattico che ponga lo studente di fronte ad un problema e lo accompagni durante tutta la dimostrazione. Lo strumento sarà responsabile di individuare ed eventualmente spiegare gli errori commessi dallo studente, e fornirà meccanismi di indicizzazione e ricerca nella libreria di lemmi e teoremi già dimostrati a disposizione dello studente.

Nella fase di start-up del progetto ci concentreremo su un dominio ristretto che rientri negli insegnamenti di matematica della maggior parte dei corsi di laurea in materie scientifiche, sviluppando tale strumento come uno strato software intorno a un nucleo costituito dal proof assistant Matita. Il dominio scelto è quello della teoria delle funzioni di una variabile reale, in particolare la teoria dei limiti e alcuni risultati classici (teorema di Rolle, di Lagrange, etc.). Tale scelta permette di proporre agli studenti un ampio numero di esercizi di dimostrazione non banali le cui soluzioni sono tutte basate su un numero ristretto di tecniche (p.e. dimostrazioni ϵ/δ).

Ci proponiamo di valutare sul campo la fruibilità e l'efficacia dello strumento, adottandolo come ausilio didattico nei corsi di Analisi I proposti agli studenti di Informatica.

Dopo la fase di start-up lo strumento didattico sviluppato assumerà un ruolo centrale nel progetto. Infatti ci proponiamo di continuare lo sviluppo dello strumento in due direzioni distinte:

- Studiare l'estensibilità ad altri settori della matematica.
- Integrare lo strumento in framework di e-learning quali quelli sviluppati nei progetti europei LeActiveMath (Language-Enhanced, User Adaptive, Interactive eLearning for Mathematics, IST-507826) e WebALT (Web Advanced Learning Technologies, EDC-22253).

1.6.3 Valorizzazione e sviluppo del proof assistant Matita

L'attuale stato dell'arte nel campo della dimostrazione assistita è stato raggiunto con una costante evoluzione di un piccolo numero di PA (Coq, Mizar, Isabelle, PVS) che hanno ormai superato il decennio di vita. L'evoluzione ha riguardato principalmente gli aspetti deduttivi (il sistema logico adottato e l'insieme di procedure automatiche di semi-decisione), rendendo sempre più espressivi questi sistemi. Al tempo stesso sono stati a lungo trascurati gli aspetti di organizzazione del sapere prodotto, di interazione con lo strumento, di integrazione con strumenti esterni e, non ultimi, di progettazione. Tutti questi aspetti sono stati studiati estensivamente a partire dall'anno 2000 nell'ambito del Mathematical Knowledge Management (MKM), una nuova branca dell'informatica che può essere vista come la specializzazione del Semantic Web al dominio estremamente ricco della matematica. Diversi membri di questo progetto hanno partecipato a due progetti europei sul MKM: MoWGLI (Math on the Web: Get it by Logic and Interfaces, IST-33562), del quale l'Università di Bologna era coordinatrice, e MKM-Net (IST-37075). Le tecniche sviluppate in tali progetti sono state integrate con lo stato dell'arte della dimostrazione assistita creando Matita, un PA di ultima generazione che è il solo PA mai sviluppato in Italia. Il gruppo di ricerca che sta sviluppando Matita, costituito prevalentemente da giovani, ha terminato la fase di sviluppo iniziale dello strumento completando un lungo lavoro iniziato nel 2000 e ora Matita è pronto per entrare nella competizione internazionale.

Matita rappresenta un ingrediente chiave di questo progetto, costituendo sia il tool utilizzato per testare lo stato dell'arte della dimostrazione interattiva di teoremi (primo obiettivo), sia il cuore dell'interfaccia didattica che intendiamo sviluppare (secondo obiettivo). In particolare, poichè questo è il primo tool a integrare strumenti di MKM in un PA, è importante valutare l'impatto concreto di tali strumenti sull'usabilità e sull'efficacia. Il feedback ottenuto guiderà lo sviluppo di Matita, che per tutta la durata del progetto verrà adattato alle esigenze incontrate.

Analogamente, al fine di sviluppare l'interfaccia didattica intorno a Matita, sarà necessario sia dotare Matita di un API per la comunicazione con l'interfaccia, sia sviluppare tattiche e procedure di decisione ad-hoc che riducano il lavoro "extra" che lo studente effettua per dimostrare formalmente passaggi che sono talmente ovvi o meccanici da venire normalmente omessi nelle prove cartacee.

L'attività di valorizzazione e sviluppo di Matita inizierà già dalla fase di start-up e proseguirà per tutta la durata del progetto.

2 Workplan

Strutturiamo la fase di start-up in cinque work-package e i partecipanti al progetto in tre sotto-gruppi. Ogni sotto-gruppo collabora a più work-package. Ogni work-package è coordinato da un sotto-gruppo.

Per ogni work-package indichiamo una lista dettagliata di obiettivi che debbono essere raggiunti e un insieme di risultati intermedi da produrre. Classifichiamo i risultati intermedi in *prototipi* (codice, prove formali di teoremi, etc.) e *report* (documentazione e analisi delle scelte effettuate e degli obiettivi raggiunti). Per alcuni di essi prevediamo una versione preliminare del report o del prototipo che verrà successivamente raffinata in base al feedback ottenuto nelle fasi successive del progetto.

2.1 Sotto-gruppi

Composizione dei sotto-gruppi:

Gruppo	Referente per	Partecipanti (* = giovane)	Percentuale di giovani
AR	Architettura	Andrea Asperti *Claudio Sacerdoti Coen *Enrico Tassi	66%
RV	Requisiti e validazione	*Lidia Maniccia *Marco Mughetti Vania Sordoni	66%
ID	Interfacce didattiche	*Ugo Dal Lago *Matteo Magnani Simone Martini *Stefano Zacchioli	75%

Partecipazione dei sotto-gruppi ai work-package in mesi uomo. L'asterisco indica il gruppo responsabile del work-package.

Work-package	AR	RV	ID	TOT
0: Project Management	3*	0	0	3
1: Specifica	2	9*	3	14
2: Formalizzazione	3	25*	9	37
3: Didattica	14	9	25*	48
4: Matita	24*	2	12	38
TOT	46	45	49	140

2.2 Work Package 0: Project Management

Sotto-gruppo responsabile: AR

Contributo di ogni sotto-gruppo (in mesi uomo):

AR	RV	ID	TOT
3	0	0	3

Obiettivi:

- Coordinazione generale del progetto e dei gruppi che vi partecipano
- Definizione dettagliata dei criteri di successo e monitoraggio dell'evoluzione del progetto.
- Monitoraggio delle attività correlate al progetto in seno ai programmi quadro della comunità europea, con l'obiettivo di promuovere i risultati ottenuti e trovare partner per il proseguimento del progetto in seno a un più ampio progetto europeo.

2.3 Work Package 1: Specifica

Sotto-gruppo responsabile: RV

Contributo di ogni sotto-gruppo (in mesi uomo):

AR	RV	ID	TOT
2	9	3	14

Obiettivi:

- Specificare le funzionalità e l'interfaccia dell'esercitatore.

- Proporre un linguaggio dichiarativo per l'interazione con il PA Matita. Il linguaggio deve approssimare per quanto possibile il comune linguaggio matematico.
- Individuare gli esercizi da far risolvere agli studenti con l'esercitatore.
- Individuare le definizioni preliminari, i lemmi e i teoremi necessari allo svolgimento degli esercizi. Tali nozioni dovranno essere formalizzate e aggiunte alla libreria di Matita.

Risultati intermedi:

D1.1a *Specifica dell'esercitatore (prima stesura)* (Report, mese 3)

Descrizione dei requisiti, delle funzionalità e dell'interfaccia dell'esercitatore. In questa prima stesura viene dato particolare rilievo alla descrizione esplorativa di una possibile interfaccia utente per valutare la quale verrà implementato un prototipo di mock-up (D3.1).

D1.2 *Sussidiario di esercizi* (Report, mese 6)

Descrizione di un insieme di esercizi, principalmente dimostrazioni, che possano essere risolti da studenti di un corso di Analisi I. Individueremo anche la libreria di definizioni, lemmi e teoremi che costituiscono la conoscenza matematica pregressa necessaria allo svolgimento di tali esercizi. La libreria individuata dovrà essere totalmente auto-contenuta al fine di formalizzarla successivamente in Matita (D2.2 e D2.3).

D1.3 *Specifica di un linguaggio dichiarativo* (Report, mese 6)

Descrizione di un linguaggio dichiarativo per prove matematiche formali. Il linguaggio sarà basato sullo stato dell'arte (linguaggi Mizar e Isar), ma potrà differire anche sensibilmente da questi a causa delle esigenze didattiche. Infatti ci proponiamo di adottare il linguaggio dichiarativo sia per l'interazione con Matita (D4.1) che nell'interfaccia dell'esercitatore (D3.2 e D3.3). Per quest'ultima in particolare valuteremo anche la possibilità di produrre una versione nazionalizzata del linguaggio.

D1.1b *Specifica dell'esercitatore (seconda stesura)* (Report, mese 9)

La seconda stesura si avvantaggerà del feedback ottenuto dal primo prototipo di mock-up (D3.1) e potrà meglio focalizzarsi sulla tipologia di esercizi che saranno già stati scelti nel frattempo (D1.2). Anche il linguaggio dichiarativo a uso didattico (D1.3) sarà già stato definito prima della seconda stesura e potrà influenzare le modalità di interazione con l'esercitatore. In particolare si valuterà l'opportunità di proporre un'interfaccia multi-modale, con una modalità di interazione basata sul linguaggio procedurale e una basata su quello dichiarativo. Mentre la prima permette di guidare maggiormente lo studente durante l'esercizio limitando l'insieme di comandi a disposizione, la seconda lo lascia completamente libero come davanti a un foglio bianco. Valuteremo anche modalità intermedie.

2.4 Work Package 2: Formalizzazione

Sotto-gruppo responsabile: RV

Contributo di ogni sotto-gruppo (in mesi uomo):

AR	RV	ID	TOT
3	25	9	37

Obiettivi:

- Formalizzare in Matita la prova del Teorema della Convergenza Limitata di Lebesgue.

- Confrontare gli stili dichiarativo e procedurale per la formalizzazione del suddetto teorema e valutare l'effettiva influenza dello stile sui tempi di sviluppo.
- Determinare se teoremi formalizzati tramite un linguaggio dichiarativo siano meno informativi degli omologhi procedurali una volta che questi siano post-processati e visualizzati tramite gli strumenti già esistenti di Mathematical Knowledge Management.
- Individuare carenze o mancanze nelle funzionalità degli odierni PA adottando il punto di vista di un matematico di formazione.
- Produrre il nucleo di una libreria di conoscenza matematica in formato elettronico al fine di esplorare le possibilità di valorizzazione di tale libreria tramite strumenti di Mathematical Knowledge Management per l'indicizzazione, la ricerca, l'aumento dell'accessibilità, etc.

Risultati intermedi:

D2.1 *Dimostrazione cartacea* (Prototipo, mese 3)

Il prototipo deve individuare i prerequisiti della prova del Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue (in termini di definizioni e lemmi utilizzati), deve individuare eventuali generalizzazioni che facilitino la formalizzazione e deve aumentarne il livello di dettaglio esplicitando i passi omessi. In questa fase vengono anche prese in considerazione assiomatizzazioni o dimostrazioni alternative al fine di scegliere l'alternativa che meglio si presta alla formalizzazione.

D2.2 *Formalizzazione libreria (tronco comune)* (Prototipo, mese 9)

Il prototipo consiste nella formalizzazione dei concetti aritmetici, algebrici e topologici che sono alla base sia della prova del Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue (D2.4 e D2.5), sia delle dimostrazioni sulle quali far esercitare gli studenti (D2.3). Questa fase della formalizzazione è particolarmente delicata in quanto è necessario prevenire le esigenze delle tre formalizzazioni successive. Inoltre ogni successivo cambiamento che divenisse necessario apportare alla libreria avrebbe conseguenze sulle tre formalizzazioni successive.

D2.3 *Formalizzazione libreria didattica* (Prototipo, mese 12)

Al termine della formalizzazione tutti gli esercizi del sussidiario (D1.2) debbono essere risolvibili senza la necessità di definire nuovi concetti o provare nuovi lemmi. Inoltre, per lasciare allo studente la più grande libertà possibile nella scelta del procedimento, la libreria deve effettivamente includere tutti i fatti "ovvi" sotto forma di lemmi o di procedure ad-hoc di (semi-)decisione (p.e. risoluzione di sistemi di equazioni lineari).

D2.4 *Formalizzazione dichiarativa del Teorema di Lebesgue* (Prototipo, mese 24)

Il teorema verrà interamente formalizzato da un gruppo di matematici utilizzando esclusivamente il linguaggio dichiarativo definito in D1.3. Il feedback ottenuto metterà in luce le effettive difficoltà incontrate da un matematico nell'interazione con un PA e suggerirà interessanti sviluppi futuri per la valorizzazione di Matita.

D2.5 *Formalizzazione procedurale del Teorema di Lebesgue* (Prototipo, mese 24)

Il teorema verrà interamente formalizzato da un gruppo di matematici utilizzando esclusivamente il linguaggio procedurale di Matita. Il principale obiettivo è verificare se il linguaggio di interazione con lo strumento abbia una reale influenza sulle capacità di formalizzazione e sui tempi richiesti. Precedenti esperienze di questo tipo sono sempre state effettuate su utenti che di formazione non sono matematici e hanno dato esiti contrastanti e largamente incomparabili.

D2.6 Conclusioni sull'esperienza di formalizzazione (Report, mese 27)

Il report conclude l'attività di formalizzazione documentando i risultati ottenuti e le problematiche affrontate in D2.5 e D2.6. Inoltre verrà valutata l'applicabilità ai teoremi dimostrati di strumenti già esistenti di Mathematical Knowledge Management quali gli strumenti di indicizzazione, ricerca e publishing da noi sviluppati in un precedente progetto europeo (MoWGLI IST-33562). Tale valutazione è particolarmente interessante in quanto nel corso del progetto MoWGLI non è stato possibile verificare se tali strumenti risultino utili già durante la fase di formalizzazione e possano influire su di essa in maniera significativa.

2.5 Work Package 3: Didattica

Sotto-gruppo responsabile: ID

Contributo di ogni sotto-gruppo (in mesi uomo):

AR	RV	ID	TOT
14	9	25	48

Obiettivi:

- Sviluppare un'interfaccia didattica (“*esercitatore*”) per lo svolgimento interattivo di esercizi di dimostrazione in analisi matematica.
- Formalizzare la libreria di lemmi e teoremi da utilizzare nello svolgimento degli esercizi.
- Validare il lavoro svolto sottoponendo l'esercitatore prima a un campione significativo di studenti e poi estendendo la sperimentazione a tutti gli studenti del corso di Analisi I ad Informatica.

Risultati intermedi:

D3.1a *Intefaccia di mock-up (prima versione)* (Prototipo, mese 6)

In accordo con i principi di rapid-prototyping, il simulacro (mock-up) dell'intefaccia descritta in D1.1 ha l'obiettivo di fornire feedback al work-package di specifica. Il simulacro verrà valutato proponendolo a un campione di studenti per giudicarne l'intuitività e l'usabilità.

D3.1b *Interfaccia di mock-up (seconda versione)* (Prototipo, mese 12)

La seconda versione ha lo stesso obiettivo della prima, ma è basata sulla seconda stesura delle specifiche dell'esercitatore (D1.1b). Verrà tenuto conto del feedback fornito direttamente durante lo sviluppo del primo prototipo dell'esercitatore (D3.4). In accordo con le tecniche di rapid prototyping, prevediamo di implementare il prototipo ripartendo da zero senza estendere il codice dell'interfaccia di mock-up.

D3.2 *Esercitatore (primo prototipo)* (Prototipo, mese 24)

Il primo prototipo dell'esercitatore sarà già completamente conforme alle specifiche (D1.1b). L'idea è di sottoporlo a un campione significativo di studenti di Analisi I del Corso di Laurea in Informatica al fine di verificarne sia l'efficacia didattica che l'usabilità. Il feedback ottenuto guiderà lo sviluppo del prototipo finale (D3.3).

D3.3 *Esercitatore (prototipo finale)* (Prototipo, mese 30)

La versione finale dell'esercitatore sarà un'evoluzione del primo prototipo (D3.2) mirata a correggere gli eventuali bug e a migliorare l'efficacia didattica dello strumento. L'esercitatore verrà utilizzato in aula durante le esercitazioni di Analisi I e consigliato

come ausilio didattico. L'obiettivo è di procedere a una vera e propria fase di testing su un campione esteso e significativo di studenti. L'esperienza didattica potrà considerarsi pienamente positiva se lo strumento verrà accettato favorevolmente dagli studenti e sarà possibile aggiungere una prova di esame opzionale in laboratorio in cui lo studente debba risolvere uno o più esercizi utilizzando il dimostratore.

D3.4 Conclusioni sull'esperienza didattica (Report, mese 36)

Al termine dell'esperienza didattica ci proponiamo di produrre un technical report che descriva l'architettura e l'implementazione dell'esercitatore (D3.3), nonché una valutazione sul raggiungimento degli obiettivi didattici che ci eravamo proposti durante la fase di sperimentazione sugli studenti. A tale fine può essere utile sottoporre agli studenti dei questionari e confrontare statisticamente in sede d'esame le abilità di risoluzione di problemi di dimostrazione comparandole a quelle di colleghi degli anni precedenti o di altri corsi di laurea.

2.6 Work Package 4: Matita

Sotto-gruppo responsabile: AR

Contributo di ogni sotto-gruppo (in mesi uomo):

AR	RV	ID	TOT
24	2	12	38

Obiettivi:

- Modificare il PA Matita affiancando al linguaggio procedurale di interazione ora implementato un linguaggio dichiarativo più vicino all'usuale linguaggio matematico.
- Sviluppare e valorizzare il PA Matita al fine di adattarlo alle esigenze scaturite durante la formalizzazione (work-package 2).
- Sviluppare e valorizzare il PA Matita al fine di agevolarne l'utilizzo in ambiti didattici (p.e. tramite l'integrazione di nuove procedure di semi-decisione per problemi di calcolo ricorrenti e dallo scarso interesse didattico che distolgono l'attenzione dal procedimento deduttivo vero e proprio).
- Modificare il PA Matita al fine di interfacciarlo con l'esercitatore sviluppato nel work-package 3.

Il quarto work-package ha essenzialmente l'obiettivo di supportare in maniera continuativa il lavoro svolto nei work-package 2 e 3 (formalizzazione e didattica) e ne condivide i principali risultati intermedi. Prevediamo in aggiunta un ulteriore risultato intermedio (D4.1) preliminare al lavoro di supporto.

Risultati intermedi:

D4.1 Versione dichiarativa di Matita (Prototipo, mese 12)

Renderemo possibile interagire con Matita sia con il linguaggio procedurale ora adottato, sia con il linguaggio dichiarativo (o i linguaggi dichiarativi) definiti in D1.3. Attualmente tutti i PA maggiormente utilizzati per sviluppi matematici adottano un solo stile. Per esempio Coq (in cui è stato dimostrato il Teorema dei Quattro Colori) adotta lo stile procedurale, mentre Mizar (la cui libreria matematica è molto ampia e comprende il Teorema della Curva di Jordan) adotta lo stile dichiarativo. Gli utenti di entrambi i

sistemi dichiarano di apprezzare lo stile proposto e l'incompatibilità dei sistemi fondazionali su cui i differenti sistemi si basano rende difficile un confronto diretto dei due stili. Con questo prototipo rendiamo possibile confrontare direttamente i due stili passando da uno all'altro condividendo la libreria di teoremi dimostrati. In questo progetto (D2.6) confronteremo il ricorso ai due stili per la prova del Teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue.

